Algorithmische Behandlung des allgemeinen Faktoren-Problems und des Bewertungs-Problems bei endlichen Graphen

Kaluza, Theodor

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 32, 1981, S.39-49

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Algorithmische Behandlung des allgemeinen Faktoren-Problems und des Bewertungs-Problems bei endlichen Graphen

Von **Theodor Kaluza,** Hannover

(eingegangen am 18.5.1981)

Bei einem endlichen schlingenfreien Graphen G sei auf seiner Eckenmenge $V = \{v, w, \ldots\}$ eine Funktion $f\colon V \rightarrow \{1, 2, \ldots\}$ definiert;

(FP) *das Faktoren-Problem:* gefragt wird nach Teilgraphen F von G, bei denen mit jeder Ecke v von G genau f(v) Kanten von F inzident sind. Im Existenz-Falle heißt F ein f-Faktor von G. Bei $f \equiv c$ spricht man von einem c-Faktor, der also ein c-regulärer, alle Ecken von G enthaltender Teilgraph von G ist; bei $f \equiv 1$ sagt man oft einfach Faktor, oder vollständiges, auch: perfektes matching;

(BP) *das Bewertungs-Problem:* sei E die Menge aller Kanten von G und E(v) die Menge der mit der Ecke v inzidenten Kanten von G; gesucht wird eine Funktion $b\colon E \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots\}$, so daß

$$\forall\, v \in V \qquad \sum_{v \,\text{—}\, w \,\in\, E(v)} b(v \,\text{—}\, w) = f(v)$$

ist. Im Existenz-Falle heißt b eine f-Bewertung von G.

Offenbar kann jeder f-Faktor als eine f-Bewertung mit Werten $b \in \{0,1\}$ gedeutet werden, – und umgekehrt.

Die genannten Fragen wurden von W.T. TUTTE gestellt und durch die Angabe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen beantwortet, die Verallgemeinerungen seines berühmten 1-Faktoren-Kriteriums sind. Siehe etwa [1].

Im folgenden wird zunächst das Bewertungs-Problem auf das Faktoren-Problem zurückgeführt und dann für das Faktoren-Problem ein Algorithmus begründet, der als passende Verallgemeinerung der sog. ungarischen Methode zur Suche nach 1-Faktoren angesehen werden kann, und der als gedachter Algorithmus einen allgemeinen Satz (Satz 1) ergibt, in jedem Einzelfall die Entscheidung der Existenz-Frage gestattet, im Existenz-Fall einen f-Faktor, und im Nichtexistenz-Fall eine im unten erklärten Sinne f-optimale Näherung liefert. Außerdem zeigt sich, daß man durch einen sehr ähnlichen Prozeß aus jedem f-Faktor jeden anderen, und aus jeder f-optimalen Näherung jede andere erhält.

Zurückführung des (BP) auf das (FP)

G_f sei der Graph, der aus G entsteht, wenn man jede Kante v —— w von G durch m(v —— w) = Max {f(v), f(w)} Kanten mit denselben Endpunkten v,w ersetzt; ein infragekommender b-Wert b > 1 für die Kante v —— w in G kann dann durch b Kanten aus der entsprechenden Serie von Mehrfach-Kanten in G_f repräsentiert werden, – und umgekehrt: so entspricht jedem f-Faktor in G_f eine f-Bewertung in G, – und umgekehrt.

Behandlung des (FP)

ad hoc-Bezeichnungen, Vereinbarungen und Feststellungen:

Ist C ein endlicher schlingenfreier Graph und v eine Ecke von C, so bedeutet $g_C(v)$ die Anzahl der mit v inzidenten Kanten von C: den Grad von v in C; ein Teilgraph von G heißt ecken-vollständig, – kurz: ein ev-Teilgraph –, wenn er alle Ecken von G enthält;

ist N ein ev-Teilgraph von G, so heißt eine Ecke v

	ungesättigt	gesättigt	übersättigt,
je nachdem $g_N(v)$	$< f(v)$	$= f(v)$	$> f(v)$ ist;

ein ev-Teilgraph H von G heißt ein Halb-Faktor zu f, wenn keine Ecke übersättigt ist, wenn also

$$\forall v \in V \qquad g_H(v) \leqq f(v) \quad \text{ist;}$$

sind H, S, H' Halb-Faktoren zu f, so heißt S schwerer als H, wenn S mehr Kanten hat als H; und es heißt H' besser als H, wenn H' schwerer ist als H und

$$\forall v \in V \qquad g_{H'}(v) \geqq g_H(v)$$

gilt;

wir ordnen jedem ev-Teilgraphen N von G den Defekt

$$D(N) = \sum_V |f(v) - g_N(v)|$$

zu und nennen diejenigen N f-optimal, für die D(N) minimal ist;

(F 1) Feststellung 1: Die f-Faktoren sind durch D = 0 charakterisiert; gibt es f-Faktoren, so sind sie (und nur sie) f-optimal;

(F 2) Feststellung 2: Bei einem Halb-Faktor H mit k_H Kanten ist

$$D(H) = \sum_V f(v) - 2\,k_H,$$

denn $g_H \leqq f \Rightarrow D(H) = \sum_V f(v) - \sum_V g_H(v)$;

danach ist bei Halb-Faktoren maximale Kantenzahl – verglichen mit allen anderen Halb-Faktoren – für f-Optimalität notwendig; sie ist auch hinreichend:

(F 3) Feststellung 3: Halb-Faktoren H_0 mit maximal vielen Kanten sind f-optimal; ist k_0 ihre Kantenzahl, so ist

$$\mathrm{Min}\,\{D(N)\} = \sum_V f(v) - 2\,k_0.$$

Beweis: Sei N_0 f-optimal; wenn N_0 kein Halb-Faktor ist, gibt es eine übersättigte Ecke v_0 und wegen $f(v_0) < g_{N_0}(v_0)$ eine Kante v_0 —— $w \in N_0$; hier kann w nicht auch übersättigt sein, denn sonst würde aus N_0 durch Streichen der Kante v_0 —— w ein ev-Teilgraph mit (um 2) kleinerem D-Wert als N_0 entstehen; da also $f(w) \geqq g_{N_0}(w)$ ist, bleibt der D-Wert beim Streichen der Kante v_0 —— w ungeändert minimal; die Möglichkeit, solche „Kanten-Subtraktionen" ohne Änderung des D-Wertes solange zu wiederholen, bis keine übersättigten Ecken mehr da sind, zeigt, daß es einen Halb-Faktor mit demselben minimalen D-Wert wie N_0 gibt. Der Rest folgt aus (F 2). □

Die Umkehrung des im Beweis von (F 3) als Kanten-Subtraktion bezeichneten Prozesses: das Hinzufügen einer Kante v —— $w \notin N$ mit einem ungesättigten und einem nicht-ungesättigten Endpunkt zu einem ev-Teilgraphen N nennen wir „Kanten-Addition"; auch bei Kanten-Addition bleibt der D-Wert ungeändert; daher zeigt der Beweis von (F 3) auch:

(F 4) Feststellung 4: Durch auf alle Arten iterierte Kanten-Addition erhält man aus allen f-optimalen Halb-Faktoren alle f-optimalen ev-Teilgraphen.

Wegen (F 4) brauchen wir uns bei der Suche nach f-optimalen ev-Teilgraphen, speziell nach f-Faktoren, also nur mit Halb-Faktoren zu befassen.

(wg) (wg)-Färbung: Ist H ein Halb-Faktor zu f in G, so nennen wir

die Kanten von H grün und
alle anderen Kanten weiß;

unter einem Tausch-Kantenzug zu H – kurz: T-Zug – verstehen wir dann einen einfachen (= keine Kante wird mehrfach durchlaufen) farb-alternierenden (= er weist bei einer Durchlaufung abwechselnd weiße und grüne Kanten auf) Kantenzug v_0 —— v_1 —— ... —— v_{2n+1} ungerader Länge, der bei einer ungesättigten Ecke v_0 mit einer weißen Kante v_0 —— v_1 beginnt und bei einer ungesättigten Ecke v_{2n+1} mit einer weißen Kante v_{2n} —— v_{2n+1} endet, wobei $v_{2n+1} = v_0$ sein darf, wenn $f(v_0) - g_H(v_0) \geqq 2$ ist;

evident ist dann die

(F 5) Feststellung 5: Vertauscht man bei den Kanten eines T-Zuges zum Halb-Faktor H die Farben, so bilden die nach dem Tausch grünen Kanten einen Halb-Faktor H', der besser ist als H.

Der unten folgende Hilfssatz, in dem gar nicht von Halb-Faktoren die Rede ist, zeigt, daß sich aus den Kanten eines Halb-Faktors H und denen eines beliebigen schwereren Halb-Faktors S mindestens ein T-Zug zu H bilden läßt; das begründet zusammen mit (F 3) und (F 5) den folgenden Algorithmus:

(A) Aus jedem nicht-f-optimalen Halb-Faktor erhält man durch wiederholtes Aufsuchen von T-Zügen und Farben-Tausch auf ihnen einen f-optimalen Halb-Faktor, – der ein f-Faktor ist, wenn es f-Faktoren gibt; der Kantenlose ev-Teilgraph von G ist ein f-Faktor zu $f \equiv 0$ und ein (i.a. nicht-f-optimaler) Halb-Faktor zu jedem $f \not\equiv 0$.

(br) (br)-Färbung: Sind H und S ev-Teilgraphen von G, so nennen wir: die Kanten von H–S (= die zu H, aber nicht zu S gehören) blau, die Kanten von S–H rot, die Ecken, bei denen $g_H > g_S$ ist (äquivalent: die mit mehr blauen als roten Kanten inzident sind), blau, die Ecken mit $g_H < g_S$ rot, und die übrigen Ecken neutral;
ferner bedeutet: rbT-Zug einen einfachen, farb-alternierenden Kantenzug $v_0 — v_1 — \dots — v_{2n} — v_{2n+1}$ ungerader Länge, der bei einer roten Ecke v_0 mit einer roten Kante $v_0 — v_1$ beginnt und mit einer roten Kante $v_{2n} — v_{2n+1}$ bei einer roten Ecke v_{2n+1} endet, wobei $v_{2n+1} = v_0$ sein darf, wenn $g_S(v_0) \geqq g_H(v_0) + 2$ ist;
ein rbS-Zug schließlich (Sackgassen-Zug) ist ein einfacher farb-alternierender Kantenzug $v_0 — v_1 — \dots — v_p$, der mit einer roten Kante $v_0 — v_1$ bei einer roten Ecke beginnt und über v_p hinaus nicht (= nicht einfach und farb-alternierend) fortgesetzt werden kann;

Hilfssatz: H und S seien ev-Teilgraphen des endlichen, schlingenfreien Graphen G, k_H und k_S ihre Kantenzahlen; wenn $k_H < k_S$ ist, gilt
(1) es gibt mindestens eine rote Ecke,
(2) es gibt mindestens einen rbT-Zug,
(3) ein rbS-Zug, der kein rbT-Zug ist, endet mit einer blauen Kante bei einer blauen Ecke.

Beweis: (1) erkennt man mit

$$2\, k_S = \sum_v g_S(v) > 2\, k_H = \sum_v g_H(v),$$

wenn man die (nicht-negativen) Summanden durch die v bijektiv aufeinander bezieht;

(3) verifiziert man aus den Definitionen durch Anzahl-Vergleiche;

(2) ergibt sich folgendermaßen aus (1) und (3): v_0 sei eine rote Ecke; dann gibt es eine rote Kante $v_0 — v_1$; diese ist Anfangs-Kante eines rbS-Zuges Z_0; wenn Z_0 kein rbT-Zug ist, hat Z_0 eine gerade Länge, enthält also ebensoviele blaue wie rote Kanten und endet mit einer blauen Kante bei einer

blauen Ecke v_{2n}; (aus Anzahl-Gründen kann man nur mit einer roten Kante bei einer roten Ecke oder mit einer blauen Kante bei einer blauen Ecke „steckenbleiben"); wir entfärben die Kanten von Z_0: die Wirkung ist dieselbe, als wenn wir sie aus H bzw. S fortgelassen und mit den Resten $H_1 = H - Z_0$ und $S_1 = S - Z_0$ erneut die (br)-Färbung vorgenommen hätten:

es ist $k_{H_1} < k_{S_1}$, und die farbig gebliebenen Kanten und Ecken haben dieselbe Farbe wie vorher, – bei den Ecken können höchstens v_0 und v_{2n} ihre Farbigkeit verloren haben (= neutral geworden sein); daher ist jeder jetzt aufgefundene rbT-Zug schon vor der Entfärbung von Z_0 vorhanden und ein rbT-Zug gewesen;

der Prozeß kann daher wiederholt werden; wenn nicht vorher, stößt man spätestens nach der Entfärbung der letzten blauen Kanten auf einen brT-Zug, denn dann ist jede noch vorhandene rote Kante ein brT-Zug der Länge 1. □

Damit ist (A) gerechtfertigt. Außerdem sieht man anhand der Bezeichnungen und Definitionen, daß jeder T-Zug ein rbT-Zug ist, und umgekehrt:

(F 6) Feststellung 6: Es sei H ein Halb-Faktor zu f in G; ist Z ein T-Zug zu H, so ist der Kantenzug Z bei (br)-Färbung mit H und S = H' aus (F 5) ein rbT-Zug; ist S ein schwererer Halb-Faktor als H und Z' ein rbT-Zug, so ist der Kantenzug Z' bei (wg)-Färbung mit H alleine ein T-Zug.

(F 7) Feststellung 7: Ist H ein Halb-Faktor zu f in G, so sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:

(1) H ist nicht-f-optimal;
(2) es gibt einen schwereren Halb-Faktor S als H;
(3) es gibt einen T-Zug zu H;
(4) es gibt einen besseren Halb-Faktor H' als H.

Beweis: (1) ⇒ (2): (F 3); (2) ⇒ (3): der Hilfssatz; (3) ⇒ (4): (F 5); (4) ⇒ (1): (F 3), da ein besserer Halb-Faktor auch schwerer ist. □

Satz 1: (F) G besitzt genau dann einen f-Faktor F, wenn bei jedem Halb-Faktor H zu f jede ungesättigte Ecke Anfang eines T-Zuges ist;
(opt) ein Halb-Faktor H ist genau dann f-optimal, wenn keine ungesättigte Ecke Anfang eines T-Zuges ist.

Beweis: (F): Nach (F 5) ist die Existenz eines f-Faktors bereits dann gesichert, wenn bei jedem Halb-Faktor mit ungesättigten Ecken – ein Halb-Faktor ohne solche Ecken ist ein Faktor – mindestens eine von ihnen Anfang eines T-Zuges ist;
existiert ein Faktor F, und wendet man die (br)-Färbung auf einen Halb-Faktor H und S = F an, so ist jede ungesättigte Ecke von H rot und also Anfang eines rbS-Zuges Z; dieser ist nach Aussage (3) des Hilfssatzes ein

rbT-Zug, weil es jetzt wegen $g_H(v) \leqq g_F(v) = f(v)$ gar keine blauen Ecken gibt; nach (F 6) ist also Z ein T-Zug;

(opt): (F 7) (1) und (3). □

Ein T-Zug-Algorithmus

Wir ergänzen den Algorithmus (A) zum Aufsuchen von f-optimalen Halb-Faktoren durch einen Algorithmus zum Auffinden von T-Zügen:

dabei nennen wir nach (wg)-Färbung zwei Ecken x, y grüne Nachbarn oder grün benachbart, wenn eine grüne Kante x —— y vorhanden ist, und weiß benachbart oder weiße Nachbarn, wenn es eine weiße Kante x —— y gibt; x und y sind weiß und grün benachbart, wenn sie durch mehrere, teils weiße, teils grüne Kanten benachbart sind;

(AT) sei H ein Halb-Faktor zu f in G und v eine ungesättigte Ecke;

(M 1) man versieht v mit der Marke 0; hat die Ecke x die Marke m bekommen, so gibt man bei geradem m allen weißen Nachbarn von x, und bei ungeradem m allen grünen Nachbarn von x die Marke $m+1$;

man unterbricht die Markierung (M 1), sobald einer der folgenden vier Fälle eingetreten ist, von denen sich die beiden ersten übrigens nicht ausschließen:

($\neq$) bei der Vergabe einer ungeraden Marke $m' \leqq k_G$ (= Kantenzahl von G) ist mindestens eine ungesättigte Ecke $v' \neq v$ mit m' markiert worden;

($=$) v selbst hat eine ungerade Marke $m' \leqq k_G$ bekommen, und es ist $f(v) - g_H(v) \geqq 2$;

(st) nach Vergabe einer Marke $m < k_G$ gestattet die Regel (M 1) keine weitere Markierung;

(k_G) die Marke k_G wurde vergeben, ohne daß dabei (oder vorher) der Fall ($\neq$) oder der Fall ($=$) eingetreten ist;

wenn es bei v beginnende T-Züge gibt, und ein kürzester unter ihnen die Länge l hat, tritt spätestens bei Vergabe der Marke $m' = l$ der Fall ($\neq$) oder der Fall ($=$) ein: daher ist ein erstes Ergebnis:

(E 1) ist der Fall (st) oder der Fall (k_G) eingetreten, so gibt es keinen bei v beginnenden T-Zug; liegt der Fall ($\neq$) oder der Fall ($=$) vor, so gibt es farb-alternierende Kantenzüge v —— … —— v' bzw. v —— … —— v der Länge m', die mit einer weißen Kante bei v beginnen, – aber nicht notwendig auch einfach sind (!);

Beispiele dafür lassen sich mit farb-alternierenden nicht-einfachen Kantenzügen und nachträglich passend gewähltem f leicht bilden;

wir nutzen nun aus, daß jeder T-Zug auch rückwärts durchlaufen ein T-Zug ist:

(M 2) liegt der Fall (=) vor, so kommen als T-Züge nur diejenigen Kantenzüge $v = v_0 — v_1 — v_2 — \ldots — v_{m'} = v_0 = v$ infrage, bei denen jede Ecke v_i unter evtl. anderen Marken (sie kann mehr als zwei Marken haben) die Marken i und m' – i trägt;

liegt der Fall (≠) vor, so nennen wir die nach (M 1) vergebenen Marken vordere Marken und führen (M 1) in eingeschränkter Form erneut, jetzt mit der Marke 0 bei v' beginnend, durch: die so entstehenden Marken nennen wir hintere Marken; die Einschränkung besteht darin, daß wir die hintere Marke i nur an Ecken vergeben, die bereits die vordere Marke m'–i tragen; im Falle (≠) kommen dann als T-Züge nur diejenigen Kantenzüge $v = v_0 — v_1 — — v_2 — \ldots — v_{m'} = v'$ infrage, bei denen jede Ecke v_i unter evtl. anderen Marken die vordere Marke i und die hintere Marke m'–i trägt;

(N) hat man bei einer Ecke y mit den Marken i, m'–i (bei (≠) soll i eine vordere und m'–i eine hintere Marke sein) notiert, auf welchen einfachen, mit einer weißen Kante beginnenden, farb-alternierenden Kantenzügen der Länge i man sie von v aus erreichen kann, so prüft man bei geradem i für jede weiße Kante y — z, und bei ungeradem i für jede grüne Kante y — z, bei der z die Marken i + 1, m'–i–1 trägt, welchen der bei y notierten Kantenzüge man mit dieser Kante einfach fortsetzen kann, – farb-alternierend sind die notierten und so fortgesetzten Kantenzüge automatisch, wenn man mit der Notation v — y bei jedem weißen Nachbarn y von v beginnt;

damit hat man als zweites Ergebnis:

(E 2) liegt der Fall (≠) oder der Fall (=) vor, so führt man (M 2) und danach (N) durch: hat man bei (N) mit dem m'-ten Schritt v' oder wieder v erreicht, so ist ein T-Zug gefunden, – andernfalls gibt es keinen T-Zug der Länge m' von v nach v' bzw. nach v; es kann dann, wenn mehrere Ecken v', v'', ... bei (M 1) die Marke m' bekommen haben, T-Züge v — ... v'', ... der Länge m', und in jedem Falle längere T-Züge geben;

welche der beschriebenen Prozesse man nun auszuführen hat, um solche T-Züge zu finden oder zu erkennen, daß es keine gibt, liegt nach dem Vorangehenden auf der Hand.

Gewinnung aller Lösungen aus einer einzelnen

„Lösung“ heißt hier: f-optimale ev-Teilgraphen, speziell also f-Faktoren, wenn es solche gibt;

der Beweis von (F 3) zeigte: eine Lösung N ist entweder ein (f-optimaler) Halb-Faktor, oder man kann einen f-optimalen Halb-Faktor aus ihr durch Kanten-Subtraktion gewinnen; nach (F 4) kann man aus allen f-optimalen Halb-Faktoren alle anderen Lösungen durch Kanten-Addition bekommen: daher braucht hier nur noch gezeigt zu werden, wie man aus einem f-optimalen Halb-Faktor alle übrigen erhält:

es seien H und H' zwei verschiedene f-optimale Halb-Faktoren; nach (F 3) und der Vorbemerkung zu (F 3) haben sie gleichviele Kanten; bei (br)-Färbung gibt es also rote Kanten und ebensoviele blaue Kanten; daher gibt es auch (mindestens) einen einfachen, farb-alternierenden Kantenzug Z', der sich weder nach vorne noch nach hinten verlängern läßt; wäre Z' von ungerader Länge, so wäre Z' ein T-Zug oder ein T-Zug mit vertauschten Farben, und dann wäre H oder H' nach Satz 1 nicht f-optimal:

folglich ist Z' von gerader Länge und entweder geschlossen, oder endet – wenn offen – an einem Ende mit einer roten Kante bei einer roten Ecke und am anderen Ende mit einer blauen Kante bei einer blauen Ecke; – sind H und H' speziell f-Faktoren, so ist Z' notwendig geschlossen, da es dann ja weder rote noch blaue Ecken gibt;

einen Kantenzug der zuletzt beschriebenen Art nennen wir einen rbU-Zug zu H und H';

läßt man aus H die blauen Kanten des rbU-Zuges Z' fort und fügt statt dessen die roten Kanten von Z' hinzu, so geht H in einen f-optimalen Halb-Faktor H_1 über, der mehr Kanten mit H' gemeinsam hat als H;

die roten Kanten von Z' gehören zu H' und zu H_1, die blauen weder zu H' noch zu H_1: man erhält daher die (br)-Färbung zu H_1 und H' einfach, indem man bei der schon vorhandenen (br)-Färbung zu H und H' die Kanten von Z' entfärbt;

folglich: ist auch H_1 noch von H' verschieden, und ist Z'' ein rbU-Zug zu H_1 und H', so ist Z'' ein zu Z' kantenfremder rbU-Zug zu H und H'; die Menge $H - H' \cup H' - H$ der Kanten, um die sich H und H' unterscheiden, läßt sich daher in paarweise kanten-fremde rbU-Züge zerlegen;

wendet man die (wg)-Färbung mit H alleine an, so hat jeder rbU-Zug Z' folgende Eigenschaften: er ist einfach (weiß-grün), farb-alternierend, von gerader Länge, und beginnt – wenn er offen ist, mit einer weißen Kante bei einer ungesättigten Ecke, –

so einen Kantenzug nennen wir einen Übergangs-Kantenzug zu H, – kurz: einen U-Zug –, und sehen:

jeder rbU-Zug zu H und irgendeinem (f-optimalen) H' ist ein U-Zug zu H; tauscht man bei den Kanten eines U-Zuges Z zu H die Farben, so bilden die nach dem Tausch grünen Kanten einen f-optimalen Halb-Faktor $H' \neq H$; wendet man mit H und diesem H' die (br)-Färbung an, so ist Z ein rbU-Zug zu H und diesem H'.

Die Eigenschaften: einfach, farb-alternierend, von gerade Länge eines U-Zuges bleiben unberührt, wenn auf anderen, zu ihm kanten-fremden U-Zügen Farbentausch vorgenommen wird; die Eigenschaft eines offenen U-Zuges aber, am weiß-kantigen Ende bei einer ungesättigten Ecke v zu beginnen, kann dabei verloren gehen, weil v bei dem Farbentausch auf den anderen U-Zügen aufhören kann, ungesättigt zu sein; sei U ein System von paarweise kantenfremden U-Zügen zu H, w(v) die Anzahl der Züge aus U, die bei der ungesättigten Ecke v (mit einer weißen Kante) beginnen, und g(v) die Anzahl derer, die bei v (mit einer grünen Kante) enden: dann gilt:

tauscht man bei den Kanten aller U-Züge aus U die Farben, so bilden die nach dem Tausch grünen Kanten genau dann einen f-optimalen Halb-Faktor H' $\neq$ H, wenn für jede ungesättigte Ecke v

$$w(v) - g(v) \leqq f(v) - g_H(v)$$

ist;

eine Auswertung und Zusammenfassung von alledem ergibt den

Satz 2: Es sei H ein f-optimaler Halb-Faktor, und es sei die (wg)-Färbung zu H ausgeführt:

ein ev-Teilgraph H' $\neq$ H ist genau dann auch ein f-optimaler Halb-Faktor, wenn er aus H durch Farben-Tausch auf den U-Zügen Z eines Systems U = {Z} aus paarweise kantenfremden U-Zügen zu H entsteht, die bei jeder ungesättigten Ecke v die Bedingung

$$w(v) - g(v) \leqq f(v) - g_H(v)$$

erfüllen.

Ist H in Satz 2 speziell ein f-Faktor, so ist jede Lösung ein f-Faktor: es gibt keine ungesättigten Ecken und daher nur geschlossene U-Züge. Satz 2 vereinfacht sich daher für Faktoren zu dem

Satz 3: Aus einem f-Faktor F erhält man alle anderen – und damit alle Lösungen –, indem man zu F die (wg)-Färbung vornimmt, und dann bei allen Systemen aus paarweise kanten-fremden (geschlossenen) U-Zügen Farben-Tausch ausführt.

Ist H f-optimal, aber kein Faktor, und v eine ungesättigte Ecke, bei der $g_H(v) < f(v) \leqq g_G(v)$ ist, so ist v bei (wg)-Färbung mit einer weißen Kante v —— w inzident, w gesättigt, wegen $f \geqq 1$ also mit einer grünen Kante w —— x inzident, und v —— w —— x also ein U-Zug zu H; man bekommt daher aus H durch Addition der Kante v —— w einerseits und durch Farben-Tausch auf dem U-Zug v —— w —— x andererseits zwei weitere Lösungen; es folgt:

Satz 4: (F e) Gibt es einen f-Faktor F, so ist F genau dann die einzige Lösung, wenn es keinen (geschlossenen) U-Zug zu F gibt;

(H 3) gibt es keinen f-Faktor, und ist bei jeder Ecke v

$$f(v) \leqq g_G(v),$$

so gibt es mindestens drei Lösungen; mindestens zwei Lösungen sind (f-optimale) Halb-Faktoren.

Das Beispiel: $G = v$ —— w —— x und $f \equiv 1$ zeigt, daß es bei (H 3) im Satz 4 Fälle mit genau drei Lösungen gibt.

U-Zug-Algorithmen:

Bei ungesättigten Ecken bietet sich zur Suche nach offenen dort beginnenden U-Zügen das Notations-Verfahren (N) an, wobei man zu jeder (ungesättigten) Ecke zunächst die bei ihr beginnenden U-Züge der Länge 2, dann die der Länge 4, ... feststellen sollte;

zur Suche nach allen bei einer (gesättigten oder ungesättigten) Ecke v beginnenden geschlossenen U-Zügen benutzt man die Markierung (M 1) mit der Marke 0 bei v beginnend; sobald v eine gerade Marke $p' > 0$ ($p' \leqq k_G$) bekommen hat, finden sich alle geschlossenen U-Züge v —— ... —— v der Länge p' unter den Kantenzügen $v = v_0$ —— v_1 —— ... —— $v_{p'} = v$, bei denen v_i die Marke i trägt; diese Kantenzüge sind noch auf Einfachheit und farb-Alternieren zu prüfen; bekommt v keine positive gerade Marke $\leqq k_G$, so gibt es keinen geschlossenen U-Zug durch v;

um die Zahl der zu prüfenden Kantenzüge zu reduzieren, nennen wir – ähnlich wie bei (M 2) – die bisher vergebenen Marken wieder vordere Marken und führen folgende Markierung mit hinteren Marken durch: v bekommt die hintere Marke 0; dann bekommen diejenigen grünen (!) Nachbarn von v, die die vordere Marke $p'-1$ tragen, die hintere Marke 1; bei den nun vorne mit $p'-1$ und hinten mit 1 markierten Ecken bekommen diejenigen weißen Nachbarn, die die vordere Marke $p'-2$ tragen, die hintere Marke 2, ...;

nun braucht man nur Kantenzüge $v = v_0$ —— ... —— v_i —— ... —— $v_{p'} = v$, bei denen v_i vorne mit i und hinten mit $p'-i$ markiert ist, auf Einfachheit und farb-Alternieren zu prüfen, was z.B. wieder mit (N) geschehen kann.

Zwei Spezialfälle:

Wenn ein T-Zug oder ein U-Zug speziell ein Weg oder ein Kreis ist, nennen wir ihn einen T-Weg, ..., bzw. einen U-Kreis;

(F 8) Feststellung 8: – wenn $f \equiv 1$ ist, ist jeder T-Zug ein T-Weg und jeder U-Zug ein U-Weg oder ein U-Kreis;

wenn G bipartit ist, ist jeder T-Zug offen und enthält einen T-Weg mit denselben Endpunkten, und jeder offene U-Zug v —— ... —— z läßt sich in einen U-Weg v —— ... —— z und zu ihm und zueinander kantenfremde U-Kreise zerlegen, und jeder geschlossene U-Zug läßt sich in kantenfremde U-Kreise zerlegen;

die darauf beruhenden Spezialisierungen unserer Feststellungen, Sätze und Algorithmen geben wir – weil insgesamt zu umfangreich – nicht ausdrücklich an.

Bemerkung 1: Wenn die Länder einer planaren endlichen Landkarte K durch einen 3-regulären Graphen G definiert sind, ist K nach TAIT genau dann 4-färbbar, wenn G in drei kantenfremde 1-Faktoren zerlegt werden kann; dies ist genau dann der Fall, wenn es einen 1-Faktor F_0 gibt, bei dem $G-F_0$ aus (eckenfremden) Kreisen gerader Länge besteht; einen solchen speziellen 1-Faktor erhält man im Existenz-Falle nach Satz 3 und (F 8) wegen der 3-Regularität aus jedem, – z.B. aus einem mit unseren Algorithmen (A) und (AT) gewonnenen –, 1-Faktor, indem nach (wg)-Färbung Farben-Tausch bei einem „geeigneten“ System von eckenfremden U-Kreisen ausgeführt wird.

Bemerkung 2: Bei unendlichen Graphen wird man den Begriff T-Zug um einfache, farb-alternierende, einseitig unendliche, bei einer ungesättigten Ecke mit einer weißen Kante beginnende Kantenzüge, und den Begriff geschlossener U-Zug um einfache, farb-alternierende, beiderseitig unendliche Kantenzüge erweitern und vermuten, daß Satz 1 (F) und Satz 3 bzw. Satz 4 (F e) gültig bleiben;

da bei (br)-Färbung mit zwei verschiedenen f-Faktoren alle Ecken neutral sind, erkennt man durch Bildung nicht-fortsetzbarer U-Züge ebenso wie bei endlichen Graphen, daß Satz 3, und damit Satz 4 (F e) tatsächlich richtig bleiben; bei Satz 1 (F) aber bedürfte es weitergehender Beweismittel, weil jetzt – im Gegensatz zum endlichen Fall – eine planlose Anwendung von (A) durchaus nicht einen f-Faktor zu liefern braucht: ist z.B. G ein beiderseitig unendlicher Weg, $f \equiv 1$, und jede dritte Kante grün, so wird keine Kante nach endlich vielen Schritten endgültig grün oder weiß gefärbt, wenn man stets T-Wege mit der gleichen Mittel-Kante benutzt: dabei ergibt (A) also keinen 1-Faktor; – es existieren aber zwei 1-Faktoren, und jeder von ihnen kann mit (A) durch geeignete andere Wahl der T-Züge aus dem durch die grünen Kanten bestimmten Halb-Faktor gewonnen werden. K. STEFFENS hat in [2] für abzählbare Graphen und $f \equiv 1$ den Teil (F) von Satz 1 bewiesen.

Literatur

[1] W.T. TUTTE, A short proof of the factor-theorem for finite graphs, Can. J. Math. VI (1954), 347–352.
[2] K. STEFFENS, Matchings in countable graphs, Can. J. Math. XXIX (1977), 165–168.
[3] W.T. TUTTE, The factorization of linear graphs, J. London Math. Soc. **22** (1947), 107–111.
[4] W.T. TUTTE, The factors of graphs, Can. J. Math. IV (1952), 314–328.